平成 29 年度　未来研究ラボシステム　研究成果報告書

研究種目：個人研究　　　　研究期間：平成 29 年 10 月～平成 30 年 9 月
研究課題名：流れ場のマルチスケール形状最適化問題と材料工学への応用

ラボ長
所属：数理・データ科学教育研究センター
氏名：中澤嵩

研究成果

当初の研究目的は以下の通りであり，進捗状況を下方に記述する．

Task1　最適化問題の準備（3 ヶ月）	**Task2　汎関数の定義（3 ヶ月）**
(a) 均質化法により，Navier-Stokes 式をミクロ・マクロスケールに分離 (b) 均質化法により，形状最適化問題の形状微分をミクロスケールで導出 （平成 29 年 10 月-同年 12 月）	(a) POD を行った際に得られる固有値を目的関数として定義 (b) 非定常 Navier-Stokes 問題と POD における固有値問題を主問題として定義 (c) Lagrange 未定乗数法を用いて汎関数を定義 （平成 30 年 1 月-同年 3 月）

Task1　最適化問題の準備

マルチスケールに物理現象を記述する手法として均質化法が挙げられる．これまで，流体力学において均質化法は Stokes 方程式が主な対象であり，Navier-Stokes 方程式は扱われてこなかった．その理由は，均質化法のアルゴリズムに従って Navier-Stokes 方程式をミクロ・マクロスケールに分離すると，ミクロスケールでは Stokes 方程式が現れることが知られている．そのため，ミクロスケールにおいて Navier-Stokes 方程式を扱うことは困難であるとされてきた．そこで，本研究では，非定常 Navier-Stokes 方程式を時間方向に離散化する．それによって，各時刻における支配方程式は Stokes 方程式となるため，均質化法を適用することが可能となると考えた．

しかしながら，下記の研究集会に参加・講演し，均質化理論を活用した場合において，Navier-Stokes 方程式の非線形項に関する理解が十分に整備されていないことが明らかとなった．

2017 年 12 月 6-8 日：九州大学 IMI 共同利用・共同研究拠点
平成 20 年度短期共同研究「均質化理論と局所体積平均理論の融合及びその新展開～構造体の迷路性と機械的分散効果に迫る～」

そこで，非線形項の取り扱いの困難さを回避するために，工学分野で発展した局所体積平均理論

を採用することで定常 Stoke 方程式のマルチスケール解析を行い，非定常 Navier-Stoke 方程式については局所体積平均理論と特性曲線法を融合させることで **Task1** を実現した.

Task2　汎関数の定義

申請書には POD で得られる固有値を目的関数として与えている．しかし，今回はより一般的に空間平均流場に依存する関数Fを目的関数と定義し，制約関数としてマクロスケール空間$\Omega = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$における非定常 Navier-Stoke 方程式と, ユニットセルであるミクロスケール空間$V = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$における定常 Navier-Stoke 方程式を設定した．次に，Lagrange 未定乗数法で目的汎関数を記述し，形状微分を取ることで感度を導出することに成功し，**Task2** を実現した.

以下に，当該最適化問題を記述する．ここで$\boldsymbol{\phi}$は，初期形状Ωから最適形状$\boldsymbol{\phi}(\Omega)$への写像であり設計変数として用いられている.

Find $\boldsymbol{\phi}(\Omega)$

Minimize $F(\overline{\boldsymbol{u}}^n)$

subject to $\{(\overline{\boldsymbol{u}}^n, \bar{p}^n)\}_{n=N_1}^{N_2}, (\boldsymbol{u}, p)$ such that let $\overline{\boldsymbol{u}}^0$ be the initial value

for all $\{(\overline{\boldsymbol{v}}^n, \bar{q}^n)\}_{n=N_1}^{N_2}$,

$$a(\overline{\boldsymbol{u}}^n, \overline{\boldsymbol{v}}^n) + c(\overline{\boldsymbol{u}}^n, \bar{q}^n) + c(\overline{\boldsymbol{v}}^n, \bar{p}^n) + L\left(p, \overline{\boldsymbol{u}}^n, \overline{\boldsymbol{v}}^n\right) = 0,$$

for all $(\boldsymbol{v}, q)$,

$$\frac{1}{|V|}\{a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, q) + c(\boldsymbol{v}, p)\} = 0,$$

where $(\overline{\boldsymbol{u}}^n, \bar{p}^n)$ is velocity and pressure at the n step in the macro scal Ω, $(\boldsymbol{u}, p)$ for macro scale V. And

$$a(\overline{\boldsymbol{u}}^n, \overline{\boldsymbol{v}}^n) = \int_\Omega \nabla \overline{\boldsymbol{u}}^{n,\mathrm{T}} : \nabla \overline{\boldsymbol{v}}^{n,\mathrm{T}}\, dx, c(\overline{\boldsymbol{u}}^n, \bar{q}^n) = \int_\Omega (\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{u}}^n)\bar{q}^n\, dx$$

$$L\left(p, \overline{\boldsymbol{u}}^n, \overline{\boldsymbol{v}}^n\right) := \int_\Omega l\left(p, \overline{\boldsymbol{u}}^n\right) \cdot \overline{\boldsymbol{v}}^n\, dx, l\left(p, \overline{\boldsymbol{u}}^n\right) = -\frac{|V_f|}{|V|}\nu \boldsymbol{\alpha}_{sym}^{n\times n}(p)\overline{\boldsymbol{u}}^n, \boldsymbol{\alpha}_{sym}^{2\times 2} = -\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2}\end{bmatrix},$$

$$\alpha_{1,1} = \frac{\left(\frac{1}{|\Gamma_2|}\int_{\Gamma_2} p d\gamma - \frac{1}{|\Gamma_4|}\int_{\Gamma_4} p d\gamma\right)}{|\Gamma_3|}, \alpha_{2,2} = \frac{\left(\frac{1}{|\Gamma_3|}\int_{\Gamma_3} p d\gamma - \frac{1}{|\Gamma_1|}\int_{\Gamma_1} p d\gamma\right)}{|\Gamma_2|},$$

$$\alpha_{1,1} = \frac{\left(\frac{1}{|\Gamma_2|}\int_{\Gamma_2} p d\gamma - \frac{1}{|\Gamma_4|}\int_{\Gamma_4} p d\gamma\right)}{|\Gamma_3|}, \alpha_{2,2} = \frac{\left(\frac{1}{|\Gamma_3|}\int_{\Gamma_3} p d\gamma - \frac{1}{|\Gamma_1|}\int_{\Gamma_1} p d\gamma\right)}{|\Gamma_2|},$$

$$\Gamma_1 = \{(y_1, y_2) |\ -0.5 \le y_1 \le 0.5, y_2 = -0.5\},$$

$$\Gamma_2 = \{(y_1, y_2) |\ y_1 = 0.5, -0.5 \le y_2 \le 0.5, \},$$

$$\Gamma_3 = \{(y_1, y_2) |\ -0.5 \le y_1 \le 0.5, y_2 = 0.5\},$$

$$\Gamma_4 = \{(y_1, y_2) |\ y_1 = -0.5, -0.5 \le y_2 \le 0.5, \}.$$

ところで，最適設計を記述する手法として，形状最適化だけでなくトポロジー最適化もまた検

討対象とした．この理由を下記に記述する．トポロジー最適化では，[0,1]の値を取る密度関数を用いて液相と固相を記述し，この密度関数が 0.5 をとる界面が境界であると表現している．しかしながら，流れ場を扱う際には，境界近傍で複雑な流れが発生することから境界を正確に設定する必要があるため，申請書には形状最適化を採用すると記述した．

しかし，近年，界面近傍に特殊な関数を設定することで，より正確に境界を近似する手法が開発されつつある．そこで，2018 年 2 月 15-17 日に MMDS 主催　数値シミュレーション入門セミナー「有限要素法ソフトウェア Freefem++講習会 中級編」で，流れ場のトポロジー最適化問題を専門としている矢地 謙太郎氏（大阪大学工学部・助教）と亀谷幸憲氏（東京大学生産研究所・博士研究員）に基調講演を依頼した．また，焼野藍子氏（東北大学流体科学研究所・助教）と同様な内容で議論を進めている．

今後，より活発な研究環境を形成するための足掛かりとするために，最適設計・マルチスケール解析を普及させる必要がある．そこで，2018 年 3 月 28 日（詳細な日程は未定）に再度，「有限要素法ソフトウェア Freefem++講習会 中級編」を開催し，Freefem++を用いたトポロジー最適化と均質化法の公開講座を行う予定である．

キーワード：形状最適化問題，均質化法，材料力学，流体力学，計算工学

研究経費（H29 年度）の内訳

備品費	消耗品費	旅費	謝金	その他	合計
0 円	379,080 円	56,880 円	円	円	449,960 円

共同研究者等

(1)共同研究者（氏名・所属）

特に該当しない

(2)研究協力者（氏名・所属・学年（学生の場合））

正宗淳氏・北海道大学理学部数学科・教授

黒田紘敏氏・北海道大学理学部数学科・准教授

田中吉太郎・北海道大学理学部数学科・博士研究員

桑原不二郎氏・静岡大学理学部数学科・教授

佐野吉彦氏・静岡大学理学部数学科・助教

発表論文等（平成 30 年 3 月 31 日現在）

研究代表者および主な共同研究者の研究業績のうち、本研究課題に関連するもののみを、現在から順に発表年次を過去に遡って記入してください。

〔雑誌論文〕
タイトル:未定
著者：J. Masamune, T. Kuroda, Y. Tanaka, T. Nakazawa, F. Kuwahara
雑誌名：Instructions for Special Issue Applicable Analysis (5th Italian-Japanese Workshop)
＊投稿準備中

〔著書〕
特に該当しない

〔学会発表〕
[1] 中澤嵩，形状最適化による流れ場の最適制御：理論，日本流体力学学会年会 2017，東京理科大学，2017 年 8 月 31 日
[2] 中澤嵩，形状最適化による流れ場の最適制御：数値シミュレーション，日本流体力学学会年会 2017，東京理科大学，2017 年 8 月 31 日
[3] 中澤嵩，数理・データ科学の融合による流れ場の効率的制御，日本応用数理学会 2017 年度年会，2017 年 9 月 6 日
[4] T. Nakazawa, Shape Optimization Problem of Flow Fields for suppressing Time Periodic Flows, Comfos17, 2017.9.19
[5] T. Nakazawa, Shape Optimization of Flow Fields Considering POD, ICJWSF2017, University of Cincinatti, 2017.10.9
[6] T. Nakazawa, Theory and Simulation for Shape Optimization Suppressing Time Periodic Flow, ICFD2017, Tohoku University, 2017.11.1
[7] 中澤嵩，数理・データ科学の融合による流体制御，応用数学合同研究集会，龍谷大学，2017年12月14日
[8] 中澤嵩，数理・データ科学の融合による流体制御，日本応用数理学会連合研究部会，大阪大学，2018年3月15日

〔その他〕
特に該当しない

外部資金獲得状況・申請状況（本研究課題に関連して、科研費、JST 等の競争的資金、受託研究、

奨学寄付金を受給された場合、また、申請された場合はその状況を記入ください）

　現在，下記の科研費に応募している．

新学術領域
領域名：材料離散幾何解析
研究課題名：数理科学・材料科学の融合による複合材料最適設計の数学基盤構築
研究経費：600 万円（H30-H31）

参考となるＨＰ等

特に該当しない